УДК 517.938.5 **Физико–математические науки**

Крапивина Анастасия Алексеевна, *студент кафедры прикладной математики, специальность «Математическое и информационное обеспечение в экономической деятельности» ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», г. Пермь*

ИССЛЕДОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНОГО КОВРА АПОЛЛОНИЯ

Аннотация. В статье проводится исследование фрактального ковра Аполлония. При помощи теории групп и дробно–линейных преобразований проводится построение ковра Аполлония и дается оценка фрактальной размерности фрактального ковра Аполлония.

Ключевые слова: фрактальная размерность, ковер Серпинского, ковер Аполлония, теория групп, дробно-линейные преобразования.

Abstract. In this paper we study fractal carpet Apollonia. With the help of group theory and of linear–fractional transformations is the construction of the carpet Apollonia and the estimation of the fractal dimension of the fractal carpet Apollonia.

Keywords: fractal dimension of the Sierpinski carpet, carpet Apollonia, theory of groups, fractional-linear transformations.

Фракталы – это геометрические объекты (линии, поверхности, пространственные тела), имеющие сильно изрезанную форму в одинаковой степени в любом масштабе. Форма этих объектов не изменяется от того, рассматриваем мы их вблизи или издалека [1]. Слово «фрактал» произошло от латинского «fractus» и переводится как дробный, ломаный, состоящий из элементов.

Мандельброт предложил пробное определение фрактала: фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа–Безиковича которого строго больше его топологической размерности (топологическая размерность всегда равна целому числу.)

Затем Мандельброт сузил свое предварительное определение, предложив заменить его следующим: фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому [2].

Строгого и полного определения фракталов пока не существует.

Основное свойство фракталов – самоподобие, предполагающее неизменность основных геометрических особенностей при изменении масштаба. Однако свойство точного самоподобия характерно лишь для регулярных фракталов. Если вместо детерминированного способа построения включить в алгоритм создания некоторый элемент случайности, то возникнут так называемые случайные фракталы.

Пусть d – обычная Евклидова размерность пространства, в котором находится фрактальный объект (d = 1 – линия, d = 2 – плоскость, d = 3 – обычное трехмерное пространство). Покроем теперь этот объект целиком d-мерными «шарами» радиуса l. Предположим, что нам потребовалось для этого не менее чем N(l) шаров. Тогда, если при достаточно малых l величина N(l) меняется с l по степенному закону

$$N(l) \sim \frac{1}{l^D},$$

то D – называется хаусдорфовой_или фрактальной размерностью этого объекта. Очевидно, что эта формула эквивалентна соотношению, использованному выше для определения длины береговой линии. Эту формулу можно переписать также в виде

$$D = -\lim_{l \to 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l}.$$

Это и служит общим определением фрактальной размерности D. В соответствии с ним величина D является локальной характеристикой данного объекта.

Можно показать, что такое определение дает привычные целочисленные значения размерности для обычных хорошо известных множеств.

Так, для множества, состоящего из конечного числа изолированных точек, N, минимальное число d–мерных «шаров», с помощью которых мы можем покрыть это множество, при достаточно малом размере шаров совпадает с количеством точек, т.е. N(l) = N и не зависит от диаметра этих шаров l. Следовательно, фрактальная размерность этого множества D = 0. Она совпадает с обычной Евклидовой размерностью изолированной точки d = 0 (точка – нульмерный объект).

Для отрезка прямой линии длиной L минимальное число N(l) одномерных отрезков размера l, с помощью которых можно покрыть данный отрезок целиком, равно $N(l) = L/l$. Значит, D = 1.

Для области площадью S гладкой двумерной поверхности число необходимых для ее покрытия квадратов $N(l) = S/l^2$, поэтому D = 2.

Для покрытия некоторого конечного объема V необходимо $N(l) = V/l^3$ кубиков с ребром l, отсюда D = 3.

Существуют регулярные фракталы, которые обладают свойством идеального самоподобия. Их покрытие можно осуществлять элементами, из которого состоит данный фрактал. Пусть на некотором этапе покрытия фрактала нам пришлось использовать как минимум N(l) таких элементов характерного размера l, а на другом N(l') элементов размера l'. Тогда величина фрактальной размерности D может быть вычислена по формуле

$$D = -\frac{\ln\left(\dfrac{N(l)}{N(l')}\right)}{\ln\left(\dfrac{l}{l'}\right)}.$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$\frac{N(l)}{N(l')} = \left(\frac{l'}{l}\right)^D.$$

Если 0 < D < 1, то фрактальный объект имеет нулевую длину, если 1 < D < 2 – то нулевую площадь, но бесконечную длину; 2 < D < 3 – то нулевой объем, но бесконечную длину и площадь.

Многие регулярные фракталы строятся путем бесконечного повторения нескольких простых операций, скажем, замены одного элемента некоторой комбинацией других, ему подобных. Так, например, ковер Серпинского (рис.1) получается при замене исходного большого треугольника тремя треугольниками в два раза меньшего размера, расположенных относительно
друг друга так, как показано на рисунке. Затем эта операция повторяется с каждым из этих маленьких треугольников, и так до бесконечности.

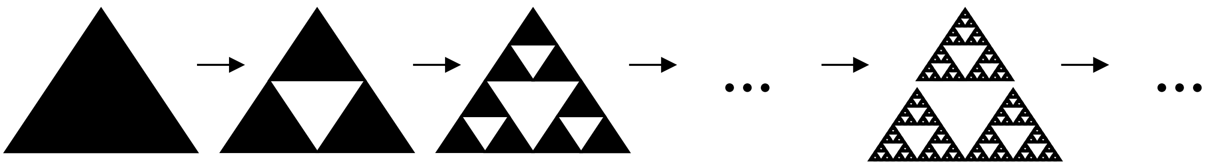

Рисунок 1 – Ковер Серпинского

На нулевом шаге имеем равносторонний треугольник N(l) = 1 с l= 1: на следующем – три равносторонних треугольника N(l') = 3, а l' = 1/2, тогда

$$D = -\frac{\ln\frac{1}{3}}{\ln\frac{1}{\frac{1}{2}}} \approx 1{,}58.$$

Так как D < 2 (т.е. меньше размерности плоскости, на которой находится объект), то ковер имеет нулевую площадь.

Исследование одного из классов фракталов – ковров Аполлония активно продолжается и в наши дни. Аполлоний дал решение задачи о построении окружности, касающейся трёх заданных окружностей (задача Аполлония).

С помощью теоремы Декарта происходит построение ковра Аполлония (рис.2).

Теорема Декарта – это основной результат, на базе которого строятся зависимости радиусов (кривизн) окружностей, образующих ковер.

Нам необходимо описать все конфигурации четырех попарно касающихся окружностей на плоскости. Когда четыре окружности попарно касаются, их радиусы не произвольны, а удовлетворяют некоторому уравнению. Это уравнение и некоторые его следствия были известны математикам древней Греции более чем две тысячи лет назад (например, задача Аполлония Пергского о построении окружности, касающейся трех заданных окружностей).

$$(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)^2 - 2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) = 0,$$

где c_i кривизна окружности с радиусом r_i.

Необходимо учитывать знак кривизны (внешнее или внутренне касание), т.к. можно ошибочно истолковать формулы Декарта.

Рассмотрим некоторые целочисленные решения уравнения Декарта. Например, пусть c_1 =1, $c_2 = c_3$=2. Необходимо найти c_4. Будем считать кривизну внешней окружности отрицательной величиной, поэтому берем $c_1 = -1$. В этом случае получается

$$(-1 + 2 + 2 + c_4)^2 = 2(1 + 4 + 4 + c_4^2)$$

Отсюда, $(3 + c_4)^2 = 18 + c_4^2$. Следовательно, $c_4^2 - 6c_4 + 9 = 0$. Получаем, что c_4 = 3.

Таким же способом можно найти c_5. В этом случае нам понадобятся кривизны c_1 = –1, $c_2 = 2$ и c_4 = 3. Получаем

$$(-1 + 2 + 3 + c_5)^2 = 2*(1 + 4 + 9 + c_5^2).$$

Отсюда, $(4+c_5)^2 = 28+c_5{}^2$. Следовательно, $c_5{}^2$-8c_5+12=0. Отсюда получаем c_5=6, $c_2 = c_3$=2.

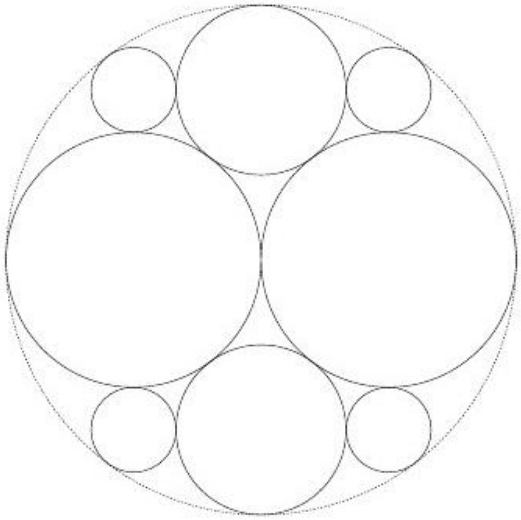

Рисунок 2 – Ковер Аполлония

Группа – множество преобразований, которое вместе с каждым преобразованием содержит обратное к нему и вместе с каждыми двумя преобразованиями – их произведение (включая произведение любого преобразования на себя и на обратное к нему) [4].

Дробно–линейная функция – функция $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$, где $a.b.c.d$ – комплексные числа. Отображение, осуществляемое этой функцией, называется дробно-линейным отображением. Условие, что $ad-bc \neq 0$ означает, что w не const. В формуле предполагается, что если $c \neq 0$, то $w(\infty) = \dfrac{a}{c}, w(-\dfrac{d}{c}) = \infty$, а если $c = 0$, то $w(\infty) = \infty$. Таким образом, дробно–линейная функция определена во всей расширенной комплексной плоскости. Отметим, что при $c = 0$ функция $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ является линейной, а отображение, ей осуществляемое называется линейным отображением.

Целью является использовать параметры дробно–линейного отображения для построения ковра Аполлония и исследования его размерности. Так как параметров четыре (a,b,c,d), то их можно однозначно определить, задавая четыре точки на расширенной комплексной плоскости или сфере.

Можно сказать, что мы переводим геометрическую задачу в задачу с параметрами, которую можно решить алгебраически, при этом используются такие подгруппы Мёбиусовых преобразований, которые дискретны, т.е. образы близких окружностей могут оказаться на сфере, удаленными на значительные, но конечные расстояния, что позволяет заполнять окружностями все меньших радиусов все получающиеся криволинейные треугольники.

Мы показали, что дробно-линейные преобразования функции $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, в которой $ad - bc \neq 0$ и где $a.b.c.d$ – комплексные числа, образуют группу так называемых «Мёбиусовых преобразований». Роль дробно-линейных преобразований очень важна в самых разных разделах математики. Преобразования Мёбиуса дают возможность на расширенной комплексной плоскости переводить окружности в окружности или прямые, а на сфере Римана – окружности в окружности, в силу конформности (сохранения углов). Выбором параметров $a.b.c.d$ можно добиться уменьшения радиусов касающихся окружностей и попадания их образов в сферические треугольники, получающиеся при таких отражениях. При этом возможны самые разнообразные комбинации радиусов, уменьшающихся по размеру. Полная алгебраическая теория и классификация таких последовательностей таких преобразований находится в стадии завершения благодаря трудам выдающихся математиков современности, филдсовских лауреатов Альфорса, Тёрстона, Милнора, Мамфорда и других [5]. Потратив свыше десяти лет, Дэвид Мамфорд, вслед за создателем теории фракталов Бенуа Мандельбротом, написал книгу «Ожерелье Индры», в которой описал теорию предельных множеств для некоторых классов мёбиусовых групп с удивительными компьютерными картинками, иллюстрирующими эти теории. В данной работе мы только обосновываем малую долю утверждения, которые используются в этой глубокой теории.

Фактически, задача об использовании различных свойств групп мёбиусовых преобразований для построения ковра Аполлония на сфере Римана сводится к использованию параметров $a.b.c.d$ в отображениях Мёбиуса. Ознакомившись с некоторыми исследованиями в этом направлении, мы приводим только несколько соображений, которые используются при исследовании фрактальной размерности ковра Аполлония и нескольких нерешенных проблем [3].

Использование групп нам нужно для того, чтобы не различать однотипные касания (какие внутренние, а какие внешние). В теореме Декарта радиусы и кривизны касающихся окружностей можно наделять знаками и тогда становится понятно, откуда получается множество вариантов решения.

Цель заключается в том, чтобы сделать однотипными все криволинейные треугольники, не различать внутреннее и внешнее касание.

Последовательным применением дробно-линейных преобразований, изучение которых на расширенной комплексной плоскости начали в конце XIX века Анри Пуанкаре и Феликс Клейн, последовательно удаляем два круга (внешняя окружность), получаем два треугольника, в них вписываем два круга меньшего радиуса, появляются новые треугольники и т.д. Процесс составления уравнений Декарта не спасает положения при построении радиусов вписанных окружностей. Удается применить специфическую ветвь теории групп с конечным множеством образующих для изучения структуры.

Методика изучения предельных положений изучалась разными способами, существенные продвижения дало использование неевклидовых геометрий, так, например, проектирование на сферу Римана – пример такой римановой геометрии со сферическим расстоянием. Возможно использование других неевклидовых геометрий и самой современной вычислительной техники.

Вычислительные эксперименты, проведенные впервые Мандельбротом по схемам, упрощающим идеи Пуанкаре и Клейна, и последующая классификация типов неподвижных точек дробно-линейных преобразований позволили изучить большинство многообразных вариантов поведения бесконечной последовательности, полученной из кругов Аполлония. На этом пути появились первые оценки размерности Хаусдорфа-Безиковича для ковра Аполлония. Не освоив техники неевклидовых геометрий и соответствующих групп в них, не удается получить даже оценки размерности. Здесь многое сделано выдающимися современными американскими математиками Уильямом Терстоном и Денисом Салливаном.

Из построений окружностей в задаче Аполлония следует, что получающиеся на плоскости и на сфере Римана круговые треугольники не самоподобны. Это осложнение приводит к тому, что определение размерности D Хаусдорфа-Безиковича для ковра Аполлония, применимое к произвольным фрактальным множествам, сам основоположник теории фракталов Бенуа Мандельброт назвал «удивительно сложным делом». Численные эксперименты показывают, что 1,300197 < D < 1,341534. Мак-Миллан предполагает, что D = 1,305638. А точный результат, который можно определить, вычислив предел

$$D = \lim \frac{\log N^{P}(T)}{\log T},$$

(где $N^{P}(T)$ – число окружностей ковра Аполлония, кривизна которых больше T) пока не найден.

Однако ковер Аполлония является фрактальным множеством, для которого фрактальная размерность D есть мера фрагментарности. В силу общих свойств фрактальных линий, если удалить круги радиусом, меньшим ε, то периметр оставшихся промежутков будет пропорционален ε^{1-D}, а ограниченная ими площадь пропорциональна ε^{2-D}.

Ковер Серпинского используется как модель для описания линейных фракталов, т.е. получающихся итерациями линейных функций. Ковер Аполлония строится аналогично, но СИФ базируется на дробно-линейной функции или, на языке преобразований, на инверсии. Ковер получен для описания сложных поверхностей в трехмерном пространстве. Мы заполняем расширенную комплексную плоскость и, тем самым, описываем структуру строения этих поверхностей.

Итогом работы является предоставление множества подходов к изучению и построению ковра Аполлония, примерная оценка его фрактальной размерности.

Библиографический список

1. Божокин С. В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
2. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – Москва: Институт компьютерных исследований, 2002.
3. Кириллов А.А. Повесть о двух фракталах (Препринт).
4. Александров П. С. Введение в теорию групп. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
5. А. М. Абрамов, Н. Я. Виленкин, Г.В. Дорофеев, А. А. Егоров, А. Н. Земляков, А. Г. Мордкович. Избранные вопросы математики: 10 кл, Факультативный курс. – М.: Просвещение, 1980.