УДК 519.863 **Математика**

Петухова Н. А., *бакалавр кафедры прикладной математики, специальность «Математическое и информационное обеспечение в экономической деятельности», ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Пермь,*
e-mail: natalja.petuhowa@yandex.ru

УРАВНЕНИЯ ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРРЫ В ЭКОНОМИКЕ

Аннотация. На базе известной математической модели Лотки – Вольтерры, которая описывает конкуренцию биологических видов, выводится система уравнений для двух конкурирующих экономических агентов.

Ключевые слова: Модель Лотки – Вольтерры, модель «хищник – жертва», конкуренция, динамическая модель.

Abstract. Based on known mathematical models of Lotka - Volterra, which describes the competition of species, derived system of equations for two competing economic agents.

Keywords: Lotka-Volterra model, "predator - prey" model, competition, dynamic model.

Введение

За долгое время изучения конкурирующих биологических популяций оказалось, что элементарные процессы борьбы за существование подчиняются определенным в своей мере количественным законам. По своей сути модель Лотки-Вольтерры (она же модель «хищник – жертва») есть математическое описание дарвиновской теории – принципа борьбы за существование. Этот принцип легко можно использовать и в современной экономике [1].

Динамическая модель предприятия.

Пусть фирма, обладает основными фондами $K(t)$, привлекает рабочую силу $L(t)$, использует природные ресурсы (сырье, вода, энергия, земля и т.д.) $R(t)$ и получает объем товара $x(t)$, который выражается в текущих ценах. Для задач со сложной структурой $R(t)$ – это оборотный капитал, $K(t)$ – основной капитал.

Обозначим производственную функцию фирмы как φ и получим первое математическое выражение: $x_1(t)=\varphi\left(K(t),L(t),R(t)\right)$. Функция φ со всеми своими первыми производными являются строго положительными. Здесь и в дальнейшем t обозначает непрерывное время. Тогда скорость изменения любой переменной обозначаем $\dot{x}$ либо dx/dt.

Для того чтобы расширить производство, руководству фирмы необходимо расширить и основные фонды, при этом использовать больше трудовых и природных ресурсов. Примем как простейший вариант исследования, что основные фонды на свое поддержание требуют амортизационных отчислений, пропорциональных объему основных фондов, а на развитие инвестиций $-I(t)$. Далее, будем предполагать, что используемые ресурсы пропорциональны основным фондам, включенным в производство: $L(t)=lK(t),\quad R(t)=rK(t),$ и фирма тратит прибыль только на развитие: $I(t)=x-lK-rK$. Добавляя к этим предположениям требование линейности производственной функции φ, получим уравнение, описывающее изменения основных фондов: $\dot{K}(t)=\left[-\beta+\varphi_K+\left(\varphi_L-1\right)l+\left(\varphi_R-1\right)r\right]K(t),$ здесь β - коэффициент износа основных фондов, $\varphi_K=\partial\varphi/\partial K,\ \varphi_L=\partial\varphi/\partial L,\ \varphi_R=\partial\varphi/\partial R$. Это уравнение приводит к экспоненциальному росту основных фондов, если $\varepsilon=-\beta+\varphi_K+\left(\varphi_L-1\right)l+\left(\varphi_R-1\right)r>0$. Соответственно и выход продукции будет расти/убывать экспоненциально: $x\left(t\right)=x\left(0\right)\cdot\exp\left(\varepsilon t\right)$ [2].

Таким образом, модель: $\dot{x}(t)=\varepsilon\cdot x(t)$ с постоянным коэффициентом роста ε характеризует динамику одного предприятия при отсутствии каких-либо экономических ограничений (в идеале). Но на практике, как выясняется ограничения всегда существуют. Например, такие как:

- рост производства, приводящий к насыщению рынка и снижению спроса;
- моральное старение товаров или услуг;
- привлечение рабочей силы в связи с расширением производства (однако когда рынок труда ограничен, расширение достигает верхнего предела);
- природные ресурсы всегда будут ограниченными либо по объему, либо по цене, когда спрос на ресурсы растет (это же касается и труда).

Для того, чтобы перейти к модели Лотки – Вольтерры, достаточно в последнем уравнении коэффициент ε представить, как убывающую линейную функцию растущего значения $x(t)$ (линейную, так как это простейшая убывающая функция): $\varepsilon = \hat{\varepsilon} - \gamma x(t)$, с постоянными $\hat{\varepsilon}, \gamma$.

Тогда, первая фирма имеет производственную функцию $x = \varphi\left(K_x, L_x, R_x\right)$ а вторая $-y = \psi\left(K_y, L_y, R_y\right)$, где φ и ψ – однородные линейные функции своих аргументов. Возьмем в предположение, что каждая фирма тратит прибыль только на инвестиции. Затраты на трудовые ресурсы и оборотный капитал пропорциональны соответствующим привлекаемым основным фондам. Коэффициенты пропорциональности вследствие предположения об ограниченности ресурсов (на общем рынке труда и сырья) будем считать линейными убывающими функциями K_x, K_y. Следовательно, изменения основных фондов обеих фирм складываются из износа и инвестиций:

$$\begin{aligned}
\dot{K}_x(t) &= -\beta_x K_x + \varphi\left(K_x, L_x, R_x\right) - L_x - R_x,\\
\dot{K}_y(t) &= -\beta_y K_y + \psi\left(K_y, L_y, R_y\right) - L_y - R_y.
\end{aligned}$$

Подставляя линейные выражения в качестве коэффициентов для труда и сырья: $L_x = \left(l_{0x} - l_{1x}K_x - l_{2x}K_y\right)K_x, \ldots, R_y = \left(r_{0y} - r_{1y}K_x - r_{2y}K_y\right)K_y$, получаем систему уравнений относительно K_x, K_y:

$$\begin{cases}
\dot{K}_x(t) = \left[-\beta_x + \varphi_K + \left(\varphi_L - 1\right)l_{0x} + \left(\varphi_R - 1\right)r_{0x} - \right.\\
\left. -\left(\varphi_L l_{1x} + \varphi_R r_{1x}\right)K_x - \left(\varphi_L l_{2x} + \varphi_R r_{2x}\right)K_y\right]K_x,\\
\dot{K}_y(t) = \left[-\beta_y + \psi_K + \left(\psi_L - 1\right)l_{0y} + \left(\psi_R - 1\right)r_{0y} - \right.\\
\left. -\left(\psi_L l_{1y} + \psi_R r_{1y}\right)K_x - \left(\psi_L l_{2y} + \psi_R r_{2y}\right)K_y\right]K_y.
\end{cases} \tag{1}$$

Для удобства переобозначим коэффициенты:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_1 = -\beta_x + \varphi_K + \left(\varphi_L - 1\right)l_{0x} + \left(\varphi_R - 1\right)r_{0x},\\
&\gamma_{11} = \varphi_L l_{1x} + \varphi_R r_{1x},\\
&\gamma_{12} = \varphi_L l_{2x} + \varphi_R r_{2x},\\
&\varepsilon_2 = -\beta_y + \psi_K + \left(\psi_L - 1\right)l_{0y} + \left(\psi_R - 1\right)r_{0y},\\
&\gamma_{21} = \psi_L l_{1y} + \psi_R r_{1y},\\
&\gamma_{22} = \psi_L l_{2y} + \psi_R r_{2y}.
\end{aligned}$$

И тогда уравнение Лотки – Вольтерры в экономическом аспекте будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases}\dot{K}_x(t)=\left[\varepsilon_1-\gamma_{11}K_x-\gamma_{12}K_y\right]K_x\\ \dot{K}_y(t)=\left[\varepsilon_2-\gamma_{21}K_x-\gamma_{22}K_y\right]K_y\end{cases} \tag{2}$$

Величины $\varphi_K, \varphi_L, \varphi_R$, ψ_K, ψ_L, ψ_R характеризуют производственные функции обеих фирм, следовательно, можно считать их заданными.

По нашему предположению о производственных функциях эти величины положительны. Коэффициенты ε и γ должны быть идентифицированы по информации об объемах основных фондов K_x, K_y. Остались только коэффициенты l и r, но их двенадцать на шесть приведенных выше уравнений. Поэтому при идентификации необходимо уделять этому особое внимание.

Ограниченность общих ресурсов приводит к тому, что с возрастанием K_x, K_y коэффициенты возобновления капитала стремятся к нулю, а затем становятся отрицательными. Это говорит о том, что фонды начинают убывать. Область в плоскости переменных K_x, K_y, когда основные фонды еще не выбывают из производства, аналитически выражается неравенствами:

$$\begin{aligned}&l_{0x}-l_{1x}K_x-l_{2x}K_y>0,\\ &r_{0y}-r_{1yx}K_x-r_{2y}K_y>0\end{aligned}.$$

При достаточно малых K_x, K_y эти неравенства выполняются. Увеличение какого-нибудь из них приводит к уменьшению коэффициента пропорциональности между стоимостью ресурсов и привлекаемых основных фондов на единицу продукции.

Так, например, если первое из указанных выше неравенств перестает выполняться при некоторых значениях K_x, K_y, то это значит, что первая из фирм получает продукцию вообще без привлечения рабочей силы, что требуется исключить. Такие особенности модели более подробно необходимо обсуждать в каждом конкретном случае.

В зависимости от ситуации, систему уравнений (2) можно при необходимости дополнить временным лагом. Так как временной лаг позволяет модели быть более адекватной реальным данным. Такое действие характерно для фирм с достаточно большим производственным циклом. Численно идентифицировать такую систему можно любым удобным способом [3].

Заключение

В настоящее время моделирование разных экономических явлений, в частности конкурентных процессов имеет важное практическое применение для краткосрочного или среднесрочного прогнозирования промышленных предприятий и экономики страны, вообще говоря. Рассмотренная в статье модель конкурентных отношений Лотки – Вольтерры тому доказательство. С ее помощью можно описать поведение двух экономических агентов на одних из важнейших экономических рынков страны, а также, спланировать краткосрочный, но весьма точный прогноз, что говорит о практической значимости этой модели выбранной модели. Хотя данная модель чаще встречается в биологии, на примере хорошо показано, что модель можно использовать и в экономической сфере.

Библиографический список

1. Прасолов А.В. Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии: учеб. пособие – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 192 с.
2. Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей популяций // Проблемы кибернетики, № 25. - М.: Наука, 1972, с. 101 - 106.
3. Прасолов, А. В, Математические модели динамики в экономике: учеб. пособие–СПб.: Изд-во Университета Экономики и Финансов, 2000. – 270 с.