УДК 517.9 Математика

Петухова Н. А., *бакалавр кафедры прикладной математики, специальность «Математическое и информационное обеспечение в экономической деятельности», ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Пермь, Россия*

e-mail: natalja.petuhowa@yandex.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРЕНТНЫХ ПРОЦЕССОВ НА БАЗЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРРЫ (МОДЕЛЬ «ХИЩНИК – ЖЕРТВА»)

Аннотация. Предлагается универсальная математическая модель динамики биологических популяций Лотки – Вольтерры, в частности случай для двух конкурирующих видов. Анализируются все варианты исходов для данной модели. Сформулирована биологическая интерпретация.

Ключевые слова: Модель Лотки – Вольтерры, модель «хищник – жертва», конкуренция, математическая динамика биологических популяций, уравнения с запаздыванием, дифференциальные уравнения.

Abstract. Proposed a universal mathematical model of the dynamics of biological populations Trays - Volterra, in particular for the case of two competing species. Analyzed all the options for the outcome of this model. It was formulated biological interpretation.

Keywords: Lotka-Volterra model, "predator - prey" model, competition, mathematical dynamics of biological populations, the equations with delay, differential equations.

Введение

От развития конкуренции и конкурентоспособности иногда зависит благополучие страны в целом. Применение экономико-математического моделирования для описания конкурентных процессов является наиболее рациональным из всех возможных методов исследований [2].

Начало математическому моделированию конкуренции было положено в 20-е годы XX в. работами Лотки и Вольтерра (динамика биологических популяций), Фишера (репликационные уравнения) и др. Разработка математических моделей конкуренции в экономике началась в 60-е годы XX в. на базе соответствующих моделей в биологии [4].

Считается, что первая формализация динамики биологических популяций восходит к Томасу Мальтусу:

$$dN(t) = \varepsilon N(t)dt, \qquad (1)$$

Но это уравнение приводит к экспоненциальному росту объема популяции, чего в принципе не может наблюдаться в природе в течение продолжительного времени [1]. Следующая модель исключает бесконечный рост и принимает во внимание эффект насыщения. Она появилась в работе Ферхюльста в 1838 г. и выглядела следующим образом:

$$dN(t) = \left[\varepsilon_0 - \gamma N(t)\right] N(t)dt, \qquad (2)$$

где коэффициент прироста ε заменен линейной функцией от объема популяции, т.е. если жизненные ресурсы популяции ограничены, то объем популяции должен с течением времени стабилизироваться. В этом уравнении уровень объема популяции равен ε_0 / γ. Сам В. Вольтерра использовал линейные функции:

$$\dot{N}_i(t) = N_i(t)\left[\varepsilon_i - \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} N_k(t)\right], \quad i = 1, \ldots n. \qquad (3)$$

Так, в задаче «хищник – жертва» предполагается, что объем популяции «жертв», являясь пищей для «хищников», определяет объем популяции последних через вегетативный период [1]. В результате некоторых логических шагов В. Вольтерра получает систему с распределенным запаздыванием:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = \left[\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int\limits_0^{+\infty} F_1(s) N_2(t-s) ds\right] N_1(t), \\ \dot{N}_2(t) = \left[-\varepsilon_1 + \gamma_2 N_1(t) - \int\limits_0^{+\infty} F_2(s) N_1(t-s) ds\right] N_2(t). \end{cases} \qquad (4)$$

Здесь N_1, N_2 – объемы популяций «жертвы» и «хищника» соответственно, а F_1, F_2 – функции, характеризирующие распределение «хищников» и «жертв» по возрастам.

Одновременно с В. Вольтеррой и независимо от него рассматриваемые модели привлекли внимание американского математика А. Дж. Лотки. Он применял их как к математической биологии, так и к проблемам теории надежности и др. Если считать, что запаздывание единственное, то без ограничений на коэффициенты модель Лотки-Вольтерры с последействием имеет вид:

$$\dot{N}_i(t) = N_i(t)\left[\varepsilon_i - \sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}N_k(t-\tau)\right], \quad i=1, \ldots n. \qquad (5)$$

Очевидна практическая ценность моделей (5) Лотки-Вольтерры [3]. Рассмотрим данную модель для двух переменных с произвольными коэффициентами:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t)\left[\varepsilon_1 + \gamma_{11}x_1(t-\tau) + \gamma_{12}x_2(t-\tau)\right],\\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t)\left[\varepsilon_2 + \gamma_{21}x_1(t-\tau) + \gamma_{22}x_2(t-\tau)\right].\end{aligned} \qquad (6)$$

Здесь постоянные параметры $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$ отвечают за содержательный смысл модели. Внутри квадратных скобок в обоих уравнениях стоят коэффициенты репродукции $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Если они положительны, то объем популяции растет. Если отрицательны, то убывает.

Рассмотрим каждый параметр в отдельности.

Если $\varepsilon_1 > 0$, то воспроизводство первого вида при малых объемах $x_1(t), x_2(t)$ осуществляется по экспоненте. В противном случае происходит вымирание первого вида, если только остальные слагаемые не сделают весь коэффициент положительным.

Параметры γ_{11}, γ_{12} характеризуют степень влияния на коэффициент репродукции объемов популяций первого и второго видов соответственно.

• Если $\gamma_{11} > 0$, то рост объема популяции первого вида приводит к росту рождаемости. Но такой случай очень редкий, потому что тогда рост оказался бы лавинообразным (взрыв, катастрофа, коллапс). Математически решения уравнения с условиями $\varepsilon_1 > 0,\ \gamma_{11} > 0$ не продолжимы во времени.

• Если $\gamma_{11} < 0$, то рост объема популяции первого вида замедляется по мере роста $x_1(t)$. Такой сценарий развития биологических популяций выглядит весьма естественно: при отсутствии $x_2(t)$ значительное увеличение $x_1(t)$ приводит к нехватке пищи, энергии и других жизненных ресурсов, увеличивает вероятность болезней, в человеческом сообществе приводит к войнам.

• Если $\gamma_{12} > 0$, то рост объема популяции второго вида приводит к росту рождаемость внутри первого вида. Это происходит, например, когда первый вид использует второй в пищу или, шире рассуждая, использует жизненный ресурс, который образуется с помощью второго вида. Например, растения выделяют кислород, который необходим человеку.

•Если $\gamma_{12} < 0$, то в модели подразумевается, что второй вид хищнически относится к первому, вплоть до уничтожения. Волки, пожирающие зайцев, могут довести их количество до минимума.

Второе уравнение интерпретируется аналогично, как процесс репродукции второго вида.

Заключение

Интерпретация запаздывания в задаче о динамике популяций очевидна: новые особи рождаются (происходит репродукция вида) со скоростью, характеристики которой определяются предшествующим состоянием популяции. Если объем популяции мал, то вероятность встречи особи противоположного пола мала. Если объем популяции велик, то увеличивается вероятность заболеваний, нехватки пищи и воды и т.д. Таким образом, репродуктивная способность вида в данный момент отражает состояние системы (собственно вида и связанных с ним других биологических видов) в некоторый предшествующий момент времени, отделенный от текущего момента по меньшей мере на вегетативный период. Такая особенность системы и учитывается в модели с помощью введения запаздывания [1].

Данная модель хорошо применяется в нынешней экономике на примере двух конкурирующих предприятий за общие производственные и рыночные ресурсы.

Библиографический список

1. Прасолов А.В. Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии: учеб. пособие – СПб.: Издательство «Лань», 2010. – 192 с.
2. Наумейко И. В., Разработка математической модели конкурентных процессов / И. В. Наумейко, В.А. Альф-рефаи // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. -2014. -№3(71). –с.55-60.
3. Базыкин А.Д., Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва- Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 368 с.
4. Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей популяций // Проблемы кибернетики, № 25. - М.: Наука, 1972, с. 101 - 106.